

Definisi Persamaan Eksak

Persamaan diferensial

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \quad (1)$$

disebut persamaan eksak jika ada fungsi kontinyu $u(x,y)$

$$du = M(x,y) dx + N(x,y) dy \quad (2)$$

Teorema (kondisi persamaan eksak)

Persamaan $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$ adalah eksak jika dan hanya jika $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Problem. Diketahui sebuah PD $M(x,y) dx + (2x^2y^3 + x^4y) dy = 0$, akan ditunjukkan bahwa fungsi $M(x,y)$ memenuhi sedemikian sehingga persamaan tersebut merupakan PD eksak.

Pembahasan:

Langkah 1.

Membuktikan $M(x,y) dx + (2x^2y^3 + x^4y) dy = 0$. Ada fungsi kontinyu $u(x,y)$ dengan PD

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Langkah 2.

Membandingkan dengan persamaan (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = N = 2x^2y^3 + x^4y$$

Langkah 3.

Persamaan diturunkan terhadap y dan x , maka

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (2x^2y^3 + x^4y)}{\partial x}$$

Langkah 4.

$u(x,y)$ kontinyu jika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Langkah 5.

Maka didapatkan

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2x^2y^3 + x^4y)}{\partial x}$$

Langkah 6.

Sebaliknya jika

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial(2x^2y^3 + x^4y)}{\partial x}$$

Maka PD diatas merupakan persamaan non eksak.

Langkah 7.

Maka dapat ditunjukkan bahwa ada fungsi $u(x,y)$ seperti berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2y^3 + x^4y$$

Langkah 8.

Integralkan $\frac{\partial u}{\partial x}$ terhadap x dengan menganggap y tetap

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$$

Langkah 9.

Dimana $\varphi(y)$ adalah fungsi y . untuk membangun fakta tersebut, maka diferensialkan persamaan tersebut terhadap y . diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial y} + \varphi'(y)$$

Langkah 10.

Dengan menyamakan persamaan $\frac{\partial u}{\partial x}$ maka

$$\begin{aligned}\varphi'(y) &= N(x, y) - \frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial y} \\ \Leftrightarrow \varphi'(y) &= 2x^2y^3 + x^4y - \frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial y}\end{aligned}$$

Langkah 11.

Dengan menganggap bahwa diferensial parsial terhadap x dan y, maka

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi'(y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial y} \right] \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial y} \right] \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

Langkah 12.

Kita ketahui bahwa dari hasil diatas diperoleh persamaan

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Dapat ditarik kesimpulan bahwa

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow 4xy^3 + 4x^3y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow M = \int (4xy^3 + 4x^3y) \partial y$$

$$\Leftrightarrow M = xy^4 + 2x^3y^2 + f(x)$$