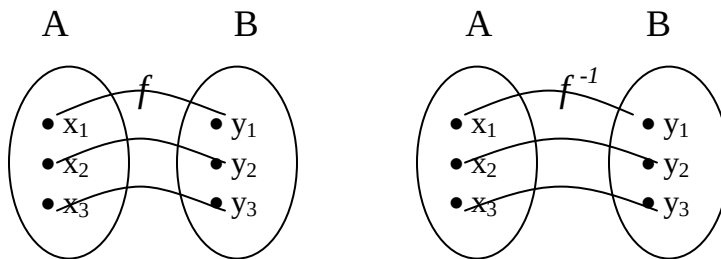




PERTEMUAN XII

Fungsi Balikan dan Turunannya



Misal f fungsi dari himpunan ke himpunan B, adalah f^{-1} fungsi balikan dari f .

Contoh 1. Diketahui $f(x) = 2x$, fungsi balikan dari f yaitu $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

Contoh 2. Diketahui $f(x) = x^2$, fungsi balikan dari f yaitu ...

Kriteria suatu fungsi $y = f(x)$ mempunyai invers adalah

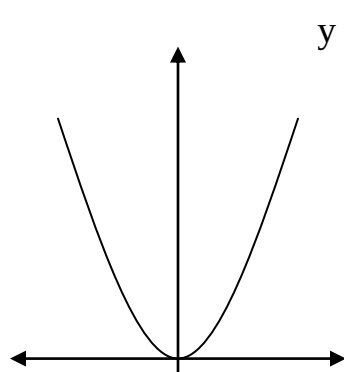
- merupakan fungsi satu – satu; jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$
- tiap garis datar memotong grafik tersebut pada paling banyak 1 titik
- f monoton murni, yaitu fungsi naik pada interval I atau turun pada I
- $f'(x) > 0$ atau $f'(x) < 0$

Kriteria bahwa suatu fungsi memiliki balikan adalah fungsi tersebut harus monoton murni, atau fungsi tersebut pada daerah asalnya berupa fungsi naik atau fungsi turun. Suatu fungsi f dikatakan monoton murni jika $f'(x) > 0$. Pada contoh 1, $f(x) = 2x$ adalah fungsi monoton murni sehingga fungsi f memiliki fungsi balikan. Jika f mempunyai fungsi balikan yaitu f^{-1} , maka f^{-1} juga memiliki balikan yaitu f .

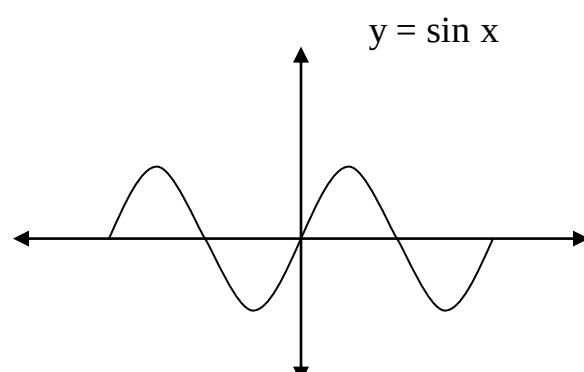


$$f(f^{-1}(y)) = y$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$



Gambar 1



Gambar 2

Langkah – langkah untuk mencari rumus untuk $f^{-1}(x)$ yaitu

1. Selesaikan persamaan $y = f(x)$ untuk x dalam y
2. Gunakan $f^{-1}(y)$ untuk menamai ekspresi yang dihasilkan dalam y
3. Gantikan yang x untuk mendapatkan rumus untuk $f^{-1}(x)$

Agar suatu fungsi yang tak memiliki balikan dalam daerah asal alaminya, mempunyai suatu balikan (invers), maka daerah asal fungsi (D_f) dapat dibatasi (sehingga fungsi tersebut naik atau turun saja), dan range fungsi (R_f) dapat dipertahankan seluas mungkin.

Fungsi Balikan Trigonometri

Contoh: $f(x) = y = \sin x \Leftrightarrow x = \sin^{-1} y$ atau $f^{-1}(x) = \sin^{-1} y = \arcsin y$



Jika peran x diganti dengan y , maka grafik dari $f^{-1}(x)$ indentik dengan grafik $f(x)$, yaitu pencerminan dari grafik $f(x)$ terhadap garis $y = x$.

Definisi

Untuk memperoleh balikan dari sinus, daerah asal fungsi dapat dibatasi pada selang $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sehingga $x = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x$ dan $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Hal ini juga berlaku pada fungsi – fungsi trigonometri lainnya, fungsi cosinus, tan, sec, cosec, dan cot, dengan selang terbatas yang pastinya juga berbeda, yaitu

(a). $x = \cos^{-1} y \Leftrightarrow y = \cos x$ dan $0 \leq x \leq \pi$.

(b). $x = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x$ dan $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(c). $x = \sec^{-1} y \Leftrightarrow y = \sec x$ dan $0 \leq x \leq \pi, x \neq \frac{\pi}{2}$.

Contoh:

1. $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} =$

4. $\sin^{-1}(\sin \frac{3\pi}{2}) =$

2. $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) =$

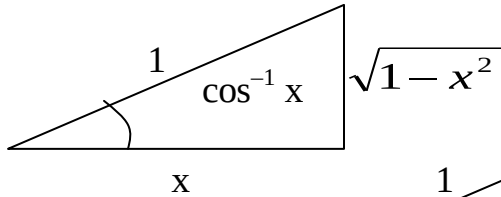
5. $\cos^{-1}(\cos^{-1}0,6) =$

3. $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$

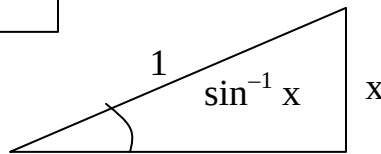
6. $\sec^{-1}(2) =$



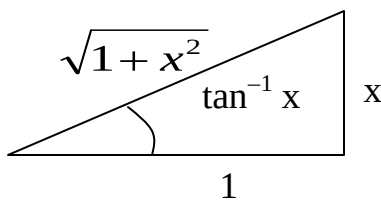
Empat kesamaan yang berguna



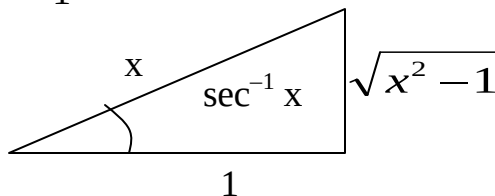
$$(i). \sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$



$$(ii). \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$



$$(iii). \sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$$



$$(iv). \tan(\sec^{-1} x) = \sqrt{x^2-1}$$

Fungsi Trigonometri : Turunan

Ingat kembali, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

turunan dari masing-masing fungsi tersebut dapat dicari, yaitu:

Contoh 1. $D_x \cot x = D_x \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc}^2 x.$

Dapat diperoleh turunan dari masing – masing fungsi tersebut:

$$D_x \sin x = \cos x$$

$$D_x \cos x = -\sin x$$

$$D_x \tan x = \sec^2 x$$

$$D_x \cot x = -\operatorname{csc}^2 x$$



$$D_x \sec x = \sec x \tan x$$

$$D_x \operatorname{cosec} x = \csc x \cot x$$

Jika $u = f(x)$, maka $D_x \sin u = \cos u D_x u$ (Aturan Rantai). Hal ini berlaku pula pada fungsi – fungsi yang lainnya (cos, tan, dan lain – lain).

Contoh 1. $D_x \sin (3x^2 + 4) = \dots$

Ambil $u = 3x^2 + 4$, diperoleh $D_x u = 6x$

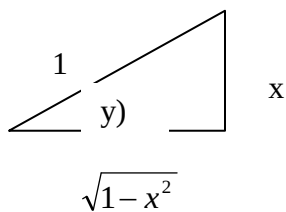
Jadi $D_x \sin (3x^2 + 4) = D_x \sin u = \cos u D_x u = \cos (3x^2 + 4) 6x$.

Contoh 2. Carilah turunan fungsi $y = \cot x \sec x$

Contoh 3. $y = \frac{x^2}{1 - \tan x}$, maka $D_x y = \dots$

Turunan Fungsi Balikan Trigonometri

(i). $y = \arcsin x = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$

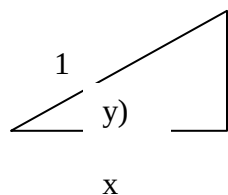


$$x = \sin y \rightarrow \frac{dx}{dy} = \dots$$

$$\frac{dx}{dy} = \dots \rightarrow \frac{dy}{dx} =$$

$$y = \sin^{-1} x \rightarrow D_x (\sin^{-1} x) = \dots, -1 < x < 1$$

(ii). $y = \arccos x = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$



$$x = \cos y \rightarrow \frac{dx}{dy} = \dots$$

$$y = \cos^{-1} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \dots$$



UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Alamat: Karangmalang , Yogyakarta 55281, Telp. 5548203 HP. 081578984400

$$y = \cos^{-1} x \rightarrow D_x (\cos^{-1} x) = \dots\dots\dots, -1 < x < 1$$

$$(iii). y = \tan^{-1} x \rightarrow D_x (\tan^{-1} x) = \dots\dots\dots$$

$$(iv). y = \sec^{-1} x \rightarrow D_x (\sec^{-1} x) = \dots\dots\dots, |x| > 1$$

Contoh 1. Carilah $D_x \arccos (x^2)$

Ambil $u = x^2$, maka $D_x (x^2) = 2x$.

$$D_x \arccos (x^2) = D_x \arccos u = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} D_x u = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Contoh 2. $D_x \tan^{-1} \sqrt{x+1} = \dots$

Dari sebelumnya, diperoleh:

$$(i). \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$(ii). \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \cos^{-1} x + c$$

$$(iii). \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} |x| + c$$