

BAB X INTEGRAL FUNGSI KHUSUS

Turunan Logaritma Natural

Diberikan fungsi logaritma natural berikut :

$$y = \ln x$$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Jadi, $y = \ln x$ merupakan anti turunan untuk $1/x$. Karena nilai Akibatnya,

$$\int \frac{1}{x} dx = |\ln x| + C, \quad x \neq 0$$

Contoh 1 :

Tentukan $\int \frac{2}{x+5} dx$

Jawab :

$$\int \frac{2}{x+5} dx = \int \frac{2}{x+5} d(x+5) = 2 \int \frac{1}{x+5} d(x+5) = 2|\ln(x)| + C$$

Contoh 2 :

Tentukan $\int \frac{2x}{10+x^2} dx$

Jawab :

$$\int \frac{2x}{10+x^2} dx = \int \frac{1}{10+x^2} d(x^2) = \int \frac{1}{10+x^2} d(x^2+10) = |\ln(x^2+10)| + C$$

Soal latihan

Hitunglah integral-integral berikut:

1. $\int \frac{4}{2x+1} dx$
2. $\int \frac{2}{4x-3} dx$
3. $\int \frac{4x+2}{x^2+x+5} dx$
4. $\int \frac{\ln x}{x} dx$
5. $\int_0^3 \frac{4x^3}{x^4+1} dx$

Diskusikan soal berikut di Chat.

Hitung x dari:

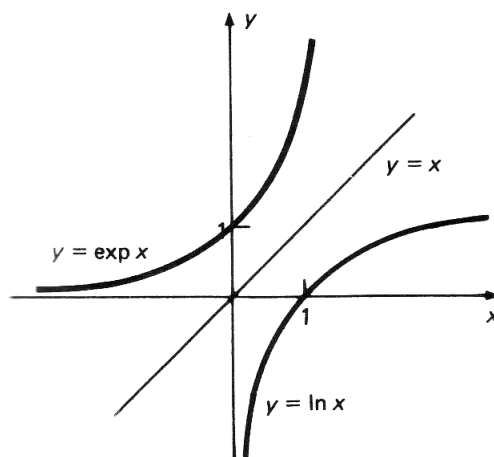
$$\int_{1/3}^x \frac{1}{t} dt = 2 \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

FUNGSI EKSPONEN ASLI

Definisi:

Invers ln disebut fungsi eksponen asli dan ditulis sbg exp, yaitu:

$$x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x$$



Dari definisi di atas diperoleh:

$$(i) \quad e^{\ln x} = x \quad ; x > 0.$$

$$(ii) \quad \ln(e^y) = y \quad ; \text{ untuk semua } y$$

Bilangan e adalah bil. riil positif yang bersifat $\ln e = 1$

$$e \approx 2,7182818284 59045$$

Jika a dan b rasional, maka:

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

Turunan e^x dan integralnya

$$y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Darisini diperoleh bahwa $y = e^x$ adalah anti turunan untuk fungsi e^x . Jadi, integral tak tentu fungsi eksponensial adalah

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Contoh 1 :

Hitung $\int e^{-4x} dx$

Jawab :

$$\int e^{-4x} dx = \frac{1}{-4} \int (-4)e^{-4x} dx = \frac{1}{-4} \int e^{-4x} d(-4x) = \frac{1}{-4} e^{-4x} + C$$

Contoh 2 :

Hitung $\int x^2 e^{-x^3} dx$

Jawab :

$$\int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{-3} \int (-3)x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{-3} \int e^{-x^3} d(-x^3) = \frac{1}{-3} e^{-x^3} + C$$

FUNGSI EKSPONEN UMUM DAN LOGARITMA UMUM

Definisi:

Untuk $a > 0$ dan x bilangan riil:

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Teorema B

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

Contoh:

Hitung $\int 2^{x^3} x^2 dx$

Jawab :

$$\int 2^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int 2^{x^3} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int 2^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} \frac{1}{\ln 2} 2^{x^3} + C$$

Fungsi $\log_a$

Merupakan fungsi logaritma dgn bilangan dasar a

Definisi:

Jika a bilangan positif dan $a \neq 1$, maka $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

Fungsi Logaritma Natural

Fungsi logaritma natural, ditulis sbg $\ln$, didefinisikan dengan:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

Domainnya adalah himpunan bilangan riil positif