

BAB IV

INTEGRAL TENTU

Pada Bab I telah dibahas mengenai integral tak tentu dan pada Bab III ini akan dibahas mengenai integral tentu. Apa beda antara integral tak tentu dan integral tentu ?

Perhatikan bentuk-bentuk berikut :

$$1. \int x^7 dx$$

$$2. \int x^{\frac{2}{3}} dx$$

Seperti yang telah anda pelajari sebelumnya bahwa kedua bentuk integral diatas merupakan integral tak tentu, yaitu keluarga kurva yang mempunyai turunan x^7 atau $x^{\frac{2}{3}}$.

Pada integral tak tentu tidak terdapat batas atas dan bawah pada integrasinya, hasil integralnya berupa variabel dan memuat konstanta C. berbeda dengan integral tak tentu, integral tentu mempunyai batas atas dan bawah pada integrasinya, hasil integralnya berupa bilangan dan tidak memuat konstanta C.

Sebagai contoh :

$$\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 + C$$

Pada integral tentu, misalkan dengan batas atas 1 dan batas bawah 0 maka notasinya sebagai berikut :

$$\int_0^1 x^7 dx$$

Arti Geometris Integral Tentu

Pada bab I dibahas bahwa kemiringan suatu kurva fungsi F di titik x adalah $F'(x) = f(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[f(x_i) \cdot \frac{(b-a)}{n} \right]$$

Untuk mempelajari hubungan antara anti turunan dan integral tentu, terlebih dahulu dipelajari mengenai teorema-teorema dasar berikut.

Teorema Dasar Kalkulus yang Pertama

Diberikan f fungsi kontinu pada interval tertutup $[a,b]$. Didefinisikan fungsi F sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt.$$

Dengan kata lain, laju akumulasi saat $t = x$ sama dengan nilai fungsi saat diakumulasi di $t = x$.

Teorema Sifat Pembanding

Jika f dan g terintegral pada $[a,b]$ dan jika untuk semua x di $[a,b]$, maka

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Dengan kata lain, integral tentu mengawet $f(x) \leq g(x)$ kan pertidaksamaan.

Teorema Sifat Keterbatasan

Jika f terintegral pada $[a,b]$ dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk semua x di $[a,b]$, maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Teorema Linearitas Integral Tentu

Diberikan f dan g fungsi yang terintegral pada $[a,b]$ dan k konstan, maka kf dan $f + g$ terintegral serta

$$1. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$2. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

Dengan ketiga teorema diatas maka teorema dasar kalkulus integral dapat ditulis ulang dalam bentuk berikut :

Jika F merupakan anti turunan dari f maka

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Teorema Dasar Kedua Kalkulus Integral

Jika f kontinu (atau terintegral) pada [a,b], dan F merupakan sebarang anti turunan fungsi f pada [a,b], maka

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Metode Substitusi Integral Tak Tentu

Diberikan g fungsi terdiferensial dan misalkan F merupakan anti turunan dari f, maka

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

Contoh : Hitunglah

$$\int \sin 3x dx.$$

Jawab :

$$\begin{aligned} \int \sin 3x dx &= \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot 3 dx \\ &= \frac{1}{3} \int \sin 3x \cdot d(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + C \end{aligned}$$

Metode Substitusi Integral Tentu

Diberikan g fungsi terdiferensial dan misalkan F merupakan anti turunan dari f , maka

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Arti geometris Teorema Dasar Kedua Kalkulus Integral

Jika $F(t)$ mengukur banyaknya suatu kuantitas saat t , maka akumulasi laju perubahan dari $t = a$ sampai $t = b$ sama dengan perubahan neto kuantitas tersebut pada interval $[a,b]$, yaitu banyaknya kuantitas pada saat $t = b$ dikurang banyaknya kuantitas saat $t = a$.

Latihan.

A. Tentukan integral tentu berikut ini :

1. $\int_0^2 x^3 dx$

2. $\int_{-1}^2 x^4 dx$

3. $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 3) dx$

4. $\int_1^2 (4x^3 + 7) dx$

5. $\int_1^4 \frac{1}{w^2} dw$

6. $\int_1^3 \frac{2}{t^3} dt$

7. $\int_0^4 \sqrt{t} dt$

8. $\int_1^8 \sqrt[3]{w} dw$

9. $\int_{-4}^{-2} \left(y^2 + \frac{1}{y^3} \right) dy$

10. $\int_1^4 \frac{s^4 - 8}{s^2} ds$

B. Dengan menggunakan metode substitusi, hitunglah integral tentu berikut :

$$35. \int_0^1 (x^2 + 1)^{10} (2x) dx$$

$$37. \int_{-1}^3 \frac{1}{(t+2)^2} dt$$

$$39. \int_5^8 \sqrt{3x+1} dx$$

$$41. \int_{-3}^3 \sqrt{7+2t^2} (8t) dt$$

$$43. \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx$$

$$36. \int_{-1}^0 \sqrt{x^3+1} (3x^2) dx$$

$$38. \int_2^{10} \sqrt{y-1} dy$$

$$40. \int_1^7 \frac{1}{\sqrt{2x+2}} dx$$

$$42. \int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}} dx$$

$$44. \int_0^{\pi/2} \sin^2 3x \cos 3x dx$$