

BAB III

NOTASI SIGMA DAN LIMIT

Notasi Sigma

Huruf Yunani $\sum$ (dibaca *sigma*), yang artinya jumlah dari, biasanya digunakan untuk menyatakan deret beraturan. Contohnya

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i$$

$$2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{50} = \sum_{i=3}^{50} 2^i$$

Secara umum, misalkan suku ke- i dalam deret tersebut dinyatakan dalam notasi u_i , maka jumlahan n suku pertamanya dapat dinotasikan dalam notasi sigma berikut :

$$\sum_{i=1}^n u_i$$

Linearitas Notasi Sigma

Diberikan $\{a_i\}$ dan $\{b_i\}$ dua buah barisan dan c adalah konstanta, maka berlaku

$$\begin{aligned} 1. \sum_{i=1}^n ca_i &= c \sum_{i=1}^n a_i \\ 2. \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) &= \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

Selanjutnya, berlaku pula bahwa

$$\begin{aligned} 3. \sum_{i=c}^n u_i &= \sum_{j=c}^n u_j \\ 4. \sum_{i=c}^n u_i &= \sum_{i=1}^{n-(c-1)} u_{i+c-1} \end{aligned}$$

Rumus-rumus berikut digunakan dalam materi integral :

$$1. \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Misalkan $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, jika urutan suku dibalik maka hasilnya tidak akan mempengaruhi nilai S_n . Akibatnya darisini diperoleh bahwa

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad (3a)$$

$$S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1 \quad (3b)$$

Jumlahkan (3a) dan (3b) maka diperoleh

$$2S_n = (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1) = n(n + 1) \rightarrow S_n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Jadi, diperoleh

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

$$2. \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$\text{Diketahui bahwa } (i + 1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1$$

Darisini diperoleh bahwa

$$(i + 1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$$

Untuk $i = 1, \dots, n$ didapatkan

$$2^3 - 1^3 = 3(1)^2 + 3(1) + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3(2)^2 + 3(2) + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 3(3)^2 + 3(3) + 1$$

...

$$n^3 - (n - 1)^3 = 3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1$$

$$(n + 1)^3 - n^3 = 3(n)^2 + 3(n) + 1$$

Jumlahkan ke-n buah persamaan diatas maka didapatkan

$$(n + 1)^3 - 1^3 = 3\{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\} + 3\{1 + 2 + \cdots + n\} + \{1 + 1 + \cdots + 1\}$$

$$\begin{aligned}
 (n+1)^3 - 1^3 &= 3 \left\{ \sum_{i=1}^n i^2 \right\} + 3 \left\{ \sum_{i=1}^n i \right\} + n \\
 &= 3 \left\{ \sum_{i=1}^n i^2 \right\} + 3 \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} + n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n i^2 &= (n+1)^3 - 1^3 - 3 \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} - n \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

$$3. \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

Dengan menggunakan trik yang sama seperti pada rumus no.2, diperoleh

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

$$4. \sum_{i=1}^n i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$$

Nilai dari jumlahan diatas adalah

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Contoh 1:

Hitunglah nilai sigma berikut :

$$\sum_{n=1}^{100} (n^2 + 2n + 1) = \dots$$

Jawab :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{100} (n^2 + 2n + 1) &= \sum_{n=1}^{100} n^2 + \sum_{n=1}^{100} 2n + \sum_{n=1}^{100} 1 \\
&= \sum_{n=1}^{100} n^2 + 2 \sum_{n=1}^{100} n + \sum_{n=1}^{100} 1 \\
&= \frac{100(100+1)(2 \cdot 100 + 1)}{6} + 2 \left(\frac{100(100+1)}{2} \right) + 100 \\
&= 348.550
\end{aligned}$$

Notasi Limit Barisan

Suatu barisan $\{S_n\}$ dikatakan konvergen ke u jika semakin besar nilai n maka nilai S_n akan semakin mendekati S . nilai S kemudian disebut limit dari barisan S_n .

Jika diketahui barisan konvergen ke u , maka hal ini dapat dinotasikan sebagai berikut :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Contoh 2 :

Misal diberikan barisan $\{A(R_n)\}$ dengan

$$A(R_n) = \frac{4}{3} - \frac{5}{n} + \frac{6}{3n^2}$$

Berapakah nilai limitnya ?

Jawab :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{n} + \frac{6}{3n^2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{3n^2} \\
&= \frac{4}{3} - 0 + 0 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Contoh 3 :

Hitunglah $\lim_{n \rightarrow \infty} A(S_n)$ jika diketahui $A(S_n) = \frac{7}{2} + \frac{4}{3n^2}$.

Jawab :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} A(S_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{2} + \frac{4}{3n^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3n^2} \\
 &= \frac{7}{2} + 0 \\
 &= \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

Latihan.

A. Tentukan nilai sigma berikut :

$$1. \sum_{n=1}^{100} (3n - 2) = \dots$$

$$2. \sum_{k=1}^{10} (k^3 - k^2) = \dots$$

$$3. \sum_{i=1}^{10} [(i-1)(4i+3)] = \dots$$

$$4. \sum_{n=4}^{100} n^2 = \dots$$

$$5. \sum_{k=0}^{10} k^3 = \dots$$

$$6. \sum_{i=5}^{10} [i+10]^2 = \dots$$

B. Tentukan nilai limit dari barisan berikut :

$$1. A(R_n) = \frac{4}{3} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$2. A(S_n) = \frac{81}{16} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + 3$$