UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Alamat: Karangmalang , Yogyakarta 55281,Telp. 5548203 HP. 081578984400

PERTEMUAN XIVa

Substitusi yang Merasionalkan

❖ **Integran yang melibatkan** $\sqrt[n]{ax+b}$

⟶ Substitusi untuk menghilangkan akar.

Contoh :

1. $\int x\sqrt{x+1}\ dx = ...$

Misalkan $u=(x+1)^{1/2}$ maka $u^2 = x+1$ dan $du = ...$

$\int x\sqrt{x+1}\ dx = ...$

❖ **Integran yang Melibatkan** $\sqrt{a^2-x^2}$ **,** $\sqrt{a^2+x^2}$ **,** $\sqrt{x^2-a^2}$

⟶ Untuk merasionalkan ketiga ekspresi di atas, substitusi trigonometri berikut.

Bentuk	Substitusi	Hasil	Batas
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin t$	$x = a\cos t$	$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan t$	$x = a\sec t$	$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec t$	$x = \pm\ a\tan t$	$0 \le t \le \pi, t \ne \frac{\pi}{2}$

Ingat : $x = a\sin t \ \Rightarrow\ \frac{x}{a} = \sin\ t \ \Rightarrow\ t = \arcsin\left(x/a\right)$

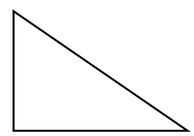
Contoh :

1. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = ...$

Misalkan $x = 2\sin t, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, maka

$dx = 2\cos t\ dt$ dan $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = \sqrt{4\cos^2 t} = 2\cos t$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = \int \frac{2\cos t}{2\sin t} 2\cos t\ dt = 2\int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = 2\int \frac{(1-\sin^2 t)}{\sin t} dt$$
$$= 2\int \operatorname{cosec} t\ dt - 2\int \sin t\ dt$$
$$= 2\ln\left|\operatorname{cosec} t + \cot t\right| + 2\cos t + C$$
$$= 2\ln\left|\frac{2}{x} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + 2\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$



❖ **Melengkapi Kuadrat**

→ Apabila ekspresi kuadrat berjenis $x^2 + Bx + C$, dimana $C = (b/2)^2$, muncul dibawah tanda akar dlm integran, pelengkapan kuadrat akan mempersiapkannya untuk substitusi trigonometri.

Contoh :

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+..........}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(...........)+.....}}$

Misalkan $u = ..., ... \le x \le .... maka$

$du = ...$ dan $\sqrt{............} = ...$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(...........)+.....}} = ...$$
$$= ....$$