



PERTEMUAN XV

Pengintegralan Fungsi Rasional

Bentuk umum :

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

dengan $N(x)$ dan $D(x)$ polinom dalam x . Untuk menyelesaikan masalah tersebut, perhatikan derajat $N(x)$ dan $D(x)$. Ada 2 kemungkinan, yaitu :

❖ $\text{der } N(x) \geq \text{der } D(x)$

Bagilah $N(x)$ dengan $D(x)$ sehingga :

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx, \text{ dengan } \text{der } R(x) < \text{der } D(x)$$

Contoh :

$$\int \frac{x^3}{x^2 + x - 2} dx = \int \left(x - 1 + \frac{3x - 2}{x^2 + x - 2} \right) dx = \int x - 1 dx + \int \frac{3x - 2}{x^2 + x - 2} dx$$

❖ $\text{der } N(x) < \text{der } D(x)$

Ada 2 cara untuk menyelesaikan kasus ini:

1. Jika $N(x) = kD'(x)$, maka

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int k \frac{D'(x)}{D(x)} dx = k \ln |D(x)| + C$$

Contoh :

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+2)}{x^2+4x+10} dx = \int \frac{1}{2} \frac{D'(x)}{D(x)} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+4x+10| + C$$

2. Jika $N(x) \neq kD'(x)$, maka perhatikan Akar-Akar $D(x) = 0$.

✚ **Akar-akar $D(x) = 0$ real dan berlainan**



Jika $D(x) = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$, dengan akar $a_1 \neq a_2 \neq ... \neq a_n$ maka :

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{B}{(x-a_2)} + \frac{C}{(x-a_n)} dx,$$

dengan A,B,C konstanta yang dicari

Contoh : 1. $\int \frac{14x+14}{x^2-x-2} dx = \int \frac{14}{x-2} dx$ (Buktikan!)

2. $\int \frac{1}{x^3-4x} dx = \frac{1}{4x} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| + C$

Akar-akar $D(x) = 0$ real dan ada yang sama (berulang)

Jk $D(x) = (x-a)(x-a)$, maka :

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} dx,$$

dengan A,B konstanta yang dicari

Jika $D(x) = (x-a)(x-a)(x-b)$, maka :

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-b)} dx,$$

dengan A,B,C konstanta yang dicari

Buktikan : 1. $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx = \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C$

2. $\int \frac{2x^2}{x^3-x^2-x+1} dx = \frac{3}{2} \ln|x-1| + (x-1)^2 + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$

Akar-akar $D(x) = 0$ tak real (faktor kuadrat) dan berbeda

Jika $D(x) = (x-a)(x^2+2px+q)$, dengan $4p^2-4q < 0$ (akar tidak real) maka :

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \frac{A}{(x-a)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)} dx,$$

dengan A,B,C konstanta yang dicari



Contoh :

$$\int \frac{5x^2 - x + 11}{(x-1)(x^2+4)} dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} dx = 3\ln(x-1) + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C$$
$$= 3\ln(x-1) + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C$$

✚ Akar-akar $D(x) = 0$ tak real (faktor kuadrat) dan ada yang sama (berulang)

Jika $D(x) = (x-a)(x^2+2px+q)^2$, dengan

$4p^2 - 4q < 0$ (akar tidak real) maka :

$$\boxed{\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \frac{A}{(x-a)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)} + \frac{Dx+E}{(x^2+2px+q)^2} dx}$$

Contoh : $\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx = \dots$